Über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$.

Von dem c. M. **Leopold Gegenbauer.**

In den folgenden Zeilen sollen einige Sätze abgeleitet werden, welche sich auf die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen beziehen.

Es werde der Inbegriff aller primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$, deren Normen m nicht überschreiten, mit (m) die Anzahl der Individuen des Zahlencomplexes (m) mit $\mathfrak{A}(m)$ bezeichnet.

Setzt man nun:

$$1.)\qquad \sum_{x=(m)} f(x) = F(m)$$

so kommt in der Summe:

$$\sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

wo $N(\alpha)$ die Norm der complexen Zahl α bedeutet, die Grösse $f(z)$ offenbar in allen Gliedern vor, welche entstehen, wenn x alle Zahlen des Gebietes $\left(\frac{n}{N(z)}\right)$ durchläuft und daher tritt sie in der genannten Summe $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(z)}\right)$-mal auf.

Man hat daher die Gleichung:

$$2.)\qquad \sum_{x=(n)} F\left(\frac{n}{N(x)}\right) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f(x).$$

Es sei nun speciell:

$$f(x) = N(x)^k$$

alsdann wird:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) f(x) = \sum_{x,\,y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) N(x)^k$$

$$= \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} N(d)^k\right)$$

wo d alle primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x zu durchlaufen hat und die zahlentheoretische Function $\varepsilon(\alpha)$, wie in meinen früheren Arbeiten, den Werth 0 oder 1 besitzt, je nachdem die Norm von α kleiner als 1 ist, oder nicht.

Wird mit $\psi'_k(x)$ die Summe der Normen der $k$ten Potenzen der primären Divisoren der ganzen complexen Zahl x bezeichnet, so kann man die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k = \sum_{x=(n)} \psi'_k(x)$$

und daher hat man auch nach 2):

3.) $$\sum_{x=(n)} \psi'_k(x) = \sum_{x=(n)} S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

wo:

$$S'_k(m) = \sum_{x=(m)} N(x)^k$$

ist.

Berücksichtigt man, dass die vierfache Anzahl jener Individuen des Zahlencomplexes (m), deren Norm den Werth β besitzt, gleich der Anzahl der Darstellungen der reellen Zahl β durch die binäre quadratische Form $(1, 0, 1)$ also gleich:

$$4\sum_{d'} (-1)^{\frac{d'-1}{2}}$$

ist, wo d' alle ungeraden Divisoren von β zu durchlaufen hat, so erhält man:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} \beta^k \left(\sum_{d'} (-1)^{\frac{d'-1}{2}} \right)$$

oder, weil unter den ganzen Zahlen von 1 bis m nur die Zahlen:

$$(2x-1),\; 2(2x-1),\; 3(2x-1), \qquad \left[\frac{m}{2x-1}\right](2x-1)$$

den ungeraden Divisor $2x-1$ besitzen:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k \left\{ 1^k+2^k+3^k+\ldots+\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k \right\}.$$

Nun ist aber:

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+r^k =$$

$$= \frac{r^{k+1}}{k+1} + \frac{r^k}{2} + \binom{k}{2}\frac{B_1}{k-1} r^{k-1} - \binom{k}{4}\frac{B_2}{k-3} r^{k-3} + \binom{k}{6}\frac{B_3}{k-5} r^{k-5} - \ldots$$

wo B_λ die λ^{te} Bernoulli'sche Zahl ist, und daher hat man:

$$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m+1}{2}\right]} (-1)^{x-1}(2x-1)^k \left\{ \frac{1}{k+1}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k+1} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^k + \binom{k}{2}\frac{B_1}{k-1}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-1} - \binom{k}{4}\frac{B_2}{k-3}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-3} +$$

$$\left. + \binom{k}{6}\frac{B_3}{k-5}\left[\frac{m}{2x-1}\right]^{k-5} - \ldots \right\}$$

Beachtet man, dass:

$$\left[\frac{m}{2x-1}\right] = \frac{m}{2x-1} - \varepsilon_x \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}}{2x-1} = \frac{\pi}{4}$$

ist, so kann man diese Gleichung auch in folgender Gestalt schreiben:

4.) $$\sum_{x=(m)} N(x)^k = \frac{\pi m^{k+1}}{4(k+1)} - \Delta_1$$

wo, wie eine genauere Untersuchung zeigt:

5.) $$|\Delta_1| < A m^{k+\frac{1}{2}}$$

ist und A für alle Werthe von m kleiner bleibt, als eine angebbare endliche Grösse A_0.

Die Gleichung 3) verwandelt sich daher in:

6) $$\sum_{x=(n)} \psi'_k(x) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)} \sum_{x=(n)} \frac{1}{N(x)^{k+1}} + n^{k+\frac{1}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x}{N(x)^{k+\frac{1}{2}}}$$

$$(|A_x| < A_0).$$

Nun ist aber, wie ich angegeben habe („Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen". Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 50. Band, I. Abtheilung):

7.) $$\sum_{x=(n)} \frac{1}{N(x)^s} = \zeta(s) L_s - \frac{\varepsilon \zeta(s)}{n^{s-1}} \{\zeta(s) + \log n\} \qquad (0 \leqq |\varepsilon| < 3)$$

wo:

$$\zeta(s) = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$L_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{(2x-1)^s}$$

ist, und daher hat man:

8.) $$\sum_{x=(n)} \psi'_k(x) = \frac{n\zeta(k+1) L_{k+1}}{4(k+1)} n^{k+1} - \Delta_2$$

wo:

$$\Delta_2 = \frac{\varepsilon \pi n \zeta(k+1)}{4(k+1)} \{\zeta(k+1) + \log n\} - n^{k+\frac{1}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x}{N(x)^{k+\frac{1}{2}}}$$

ist, aus welcher Gleichung folgt:

$$9.)\quad |\Delta_2| < \frac{3\pi\zeta(k+1)}{4(k+1)}\{\zeta(k+1)+\log n\}\, n + \\ + A_0\,\zeta\left(k+\frac{1}{2}\right)L_{k+\frac{1}{2}}\, n^{k+\frac{1}{2}}.$$

Aus den Relationen 8) und 9) ergeben sich die Formeln:

$$10.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \psi'_k(x)}{n^{k+1}} = \frac{\pi\zeta(k+1)L_{k+1}}{4(k+1)}$$

$$11.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \psi'_{2k}(x)}{n^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+2}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{2k+4}\Gamma(2k+2)}$$

$$12.)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \psi_{2k+1}(x)}{n^{2k+2}} = \frac{(2\pi)^{2k+3}B_{k+1}L_{2k+2}}{16(k+1)\Gamma(2k+3)}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die arithmetischen Theoreme:

Die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\zeta(k+1)L_{k+1}$-fache der k^{ten} Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel $\frac{\pi^{+2k1}\zeta(2k+1)\tau_{2k}}{2^{2k+2}\Gamma(2k+1)}$-mal so gross, als die $(2k)^{\text{te}}$ Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der $(2k+1)^{\text{ten}}$ Potenzen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel $\frac{(2\pi)^{2k+2}B_{k+1}L_{2k+2}}{2\Gamma(2k+3)}$-mal so gross, als die $(2k+1)^{\text{te}}$ Potenz der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^2 L_2}{6}$-fache der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der Quadrate der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^3 \zeta(3)}{96}$-fache des Quadrates der Norm der Zahl.

Die Summe der Normen der Cuben der primären Divisoren einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ ist im Mittel das $\frac{\pi^4 L_4}{90}$-fache der dritten Potenz der Norm der Zahl.

Ist p_1 irgend eine (ein- oder zweigliedrige) Primzahl des Gebietes (n), so stellt die Differenz:

$$S'_k(n) - N(p_1)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1)}\right)$$

offenbar die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen jener Zahlen des Bereiches (n) vor, welche nicht durch p_1 theilbar sind. Ist p_2 eine zweite, dem Zahlencomplexe (n) angehörige Primzahl, so wird nach der eben gemachten Bemerkung die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen aller im Gebiete (n) befindlichen, weder durch p_1 noch durch p_2 theilbaren Zahlen durch den Ausdruck:

$$S'_k(n) - N(p_1)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1)}\right) - N(p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_2)}\right) + \\ + N(p_1 p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)}\right)$$

angegeben, weil die Summe der Normen der k^{ten} Potenzen aller nicht durch p_1 aber durch p_2 theilbaren Zahlen von (n):

$$S'_k\left(\frac{n}{N(p_2)}\right) - N(p_1 p_2)^k S'_k\left(\frac{n}{N(p_1 p_2)}\right)$$

beträgt.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt, dass die Summe der k^{ten} Potenzen der Normen aller zu x theilerfremden, dem Zahlencomplexe (n) angehörigen complexen Zahlen $\varphi_k(x, n)$ durch die Gleichung:

$$13.)\qquad \varphi_k(x, n) = \sum_d S'_k\left(\frac{n}{N(d)}\right) N(d)^k \mu(d)$$

gegeben wird, wo die Summation bezüglich d über alle Divisoren von x auszudehnen ist und die zahlentheoretische Function $\mu(\alpha)$

den Werth 0 hat, wenn α durch ein Quadrat theilbar ist, gleich $+1$ wird, wenn α eine complexe Einheit oder aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, endlich den Werth -1 in allen anderen Fällen besitzt.

Ist speciell $k=0$, so wird offenbar:

$$S'_0(m) = \mathfrak{A}(m)$$

so dass man für die Anzahl $\varphi(x,n)$ aller zu x theilerfremden Zahlen des Complexes (n) folgende Gleichung hat:

14.) $$\varphi(x,n) = \sum_d \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(d)}\right)\mu(d).$$

Berücksichtigt man die Relation 4.), so kann man die Gleichung 13.) auch in folgender Weise schreiben:

15.) $$\varphi_k(x,n) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)} \sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)} - n^{k+\frac{1}{2}} \sum_d \frac{A_d\,\mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}}$$
$$(|A_d| < A_0)$$

wo die Summationen bezüglich d über alle primären Divisoren von x auszudehnen sind.

Nun bestehen, wie ich a. a. O. gezeigt habe, folgende Relationen:

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x)^s} = \frac{1}{\zeta(s)L_s}$$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\varphi(x)}{N(x)^s} = \frac{\zeta(s-1)L_{s-1}}{\zeta(s)L_s}$$

wo $\varphi(x)$ die Anzahl jener Glieder eines vollständigen Restsystems für den Modul x ist, welche mit x keinen gemeinschaftlichen Factor haben, und daher ist:

$$\sum_{x,y=(\infty)} \frac{\mu(x)N(y)}{N(xy)^s} = \sum_{x=(\infty)} \frac{\varphi(x)}{N(x)^s}$$

aus welcher Gleichung sich die Formel:

16.) $$\sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)} = \frac{\varphi(x)}{N(x)}$$

ergibt.

Die Gleichung 15.) verwandelt sich daher in:

17.) $$\varphi_k(x, n) = \frac{\pi n^{k+1}}{4(k+1)} \frac{\varphi(x)}{N(x)} - n^{k+\frac{1}{2}} \sum_d \frac{A_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}}.$$

und speciell:

18.) $$\varphi(x, n) = \frac{\pi n}{4} \frac{\varphi(x)}{N(x)} - \sqrt{n} \sum_d \frac{A'_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}}$$

Es ist offenbar:

19.) $$\left| \sum_d \frac{A_d \mu(d)}{N(d)^{\frac{1}{2}}} \right| < A_0 \sum_{y=(x)} \frac{1}{N(y)^{\frac{1}{2}}}$$
$$< 2A_0 N(x)^{\frac{1}{4}}$$

Multiplicirt man die Gleichung 13.) mit $\varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)$ und summirt bezüglich x über alle Zahlen des Gebietes (n), so erhält man:

20.) $$\sum_{x=(n)} \varphi_k(x, n) = \sum_{x=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_d S'_k\left(\frac{n}{N(d)}\right) N(d)^k \mu(d)\right)$$
$$= \sum_{x, y=(n)} \varepsilon\left(\frac{n}{N(xy)}\right) S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k \mu(x)$$
$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) S'_k\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x)^k \mu(x)$$

und speciell:

21.) $$\sum_{x=(n)} \varphi(x, n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)^2 \mu(x).$$

Berücksichtigt man die Formel 4.) und die bekannte Relation:

$$\mathfrak{A}(m) = \frac{\pi m}{4} + \varepsilon\sqrt{m} \qquad (0 \leqq |\varepsilon| < 1)$$

so verwandelt sich die Gleichung 20.) in:

22.) $$\sum_{x=(n)} \varphi_k(x, n) = \frac{3n^{k+2}}{8(k+1) L_2} - \Delta_3$$

wo, wie eine einfache Rechnung ergibt:

$$|\Delta_3| < B_0\, n^{k+\frac{3}{2}}$$

ist.

Man hat also die Relationen:

23.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \varphi_k(x,n)}{n^{k+2}} = \frac{3}{8(k+1)L_2}$$

24.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \varphi(x,n)}{n^2} = \frac{3}{8L_2}.$$

Bezeichnet man mit $\overline{\varphi}_k(x)$ die Summe der Normen der $k$ten Potenzen jener Glieder eines vollständigen Restsystems für den Modul x, welche zu x theilerfremd sind, so ist, wie sich aus 17.) ergibt:

25.) $$\overline{\varphi}_k(x) = \frac{N(x)^k}{k+1}\,\varphi(x) + C_0\, N(x)^{k+\frac{3}{4}}$$

wo C_0 eine für alle x endliche Grösse ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

26.) $$\sum_{x=(n)} \overline{\varphi}_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) + D_0\, n^{k+\frac{7}{4}}$$

wo D_0 für alle n eine endliche angebbare Grösse nicht überschreiten kann.

Nun ist:

$$\sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) = \sum_{x=(n)} N(x)^{k+1} \left(\sum_d \frac{\mu(d)}{N(d)}\right)$$

$$= \sum_{x,y=(n)} N(xy)^{k+1} \frac{\mu(x)}{N(x)}$$

$$= \sum_{x=(n)} N(x)^k S'_{k+1}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x)$$

oder nach 4):

27.) $$\sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x) = \frac{\pi n^{k+2}}{4(k+2)} \sum_{x=(n)} \frac{\mu(x)}{N(x)^2} - n^{k+\frac{3}{2}} \sum_{x=(n)} \frac{A_x \mu(x)}{N(x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{3n^{k+2}}{2\pi L_2(k+2)} - \Delta_4$$

wo:

$$|\Delta_4| < En^{k+\frac{3}{2}}$$

ist und E für alle n endlich bleibt.

Die Gleichung 26.) verwandelt sich daher in:

28.) $$\sum_{x=(n)} \bar{\varphi}_k(x) = \frac{3n^{k+2}}{2\pi L_2(k+1)(k+2)} - \Delta_5$$

wo:

$$|\Delta_5| < Fn^{k+\frac{7}{4}}$$

ist.

Aus den Gleichungen 27.) und 28.) folgen die Relationen:

29.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} N(x)^k \varphi(x)}{n^{k+2}} = \frac{3}{2\pi L_2(k+2)}$$

30.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi_k(x)}{n^{k+2}} = \frac{3}{2\pi L_2(k+1)(k+2)}$$

31.) $$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \varphi(x)}{n^2} = \frac{3}{4\pi L_2}$$

Die letzte Formel hat im Wesentlichen schon Herr F. Mertens aufgestellt.

Man hat daher das folgende arithmetische Theorem:

Die Summe der Normen der $k$ten Potenzen derjenigen Glieder eines vollständigen Restsystems in Bezug auf einen gegebenen Modul, welche zum Modul theilerfremd sind, ist im Mittel $\frac{3}{8(k+1)L_2}$-mal so gross, als die Norm der $(k+1)$ten Potenz des Moduls.

Schreibt man in der Gleichung:

$$\sum_{x=(n} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) = \sum_{x=(n)} \psi_0'(x)$$
$$= \Psi'(n)$$

für n: $\frac{n}{N(y)}$ multiplicirt mit $\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y)$ und summirt bezüglich y über alle Individuen des Zahlencomplexes (n), so erhält man:

$$\sum_{x,y=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(xy)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y) = \sum_{y=(n)} \Psi'\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y)$$

oder:

$$\sum_{\delta=(n)} \Psi'\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y)}\right)\mu(y) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\left(\sum_{d} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(d)}\right)\mu(d)\right)$$
$$= \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi(x, n).$$

Nun ist aber, wie Herr F. Mertens gezeigt hat:

$$\Psi'(m) = \frac{\pi^2}{16} m \left\{\log m + 2C + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} - 1\right\} + Gm^{\frac{3}{4}}$$

wo G eine für alle m endliche Grösse und:

$$\mathfrak{M}_s = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{(-1)^{x-1}\log(2x+1)}{(2x+1)^s}$$

ist.

Die letzte Gleichung verwandelt sich daher in die folgende:

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi(x, n) = \frac{\pi^3 n^2}{64}\left\{\frac{6}{\pi^2 L_2}\left(\log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{36\mathfrak{F}}{\pi^4 L_2} - \frac{6\mathfrak{M}_2}{\pi^2 L_2^2}\right\} - \Delta_6$$

wo

$$|\Delta_6| < Hn^{\frac{7}{4}}$$

$$\mathfrak{F} = \sum_{x=2}^{x=\infty} \frac{\log x}{x^2}$$

ist.

Es ist demnach:

32.) $$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \varphi(x, n)}{n^2} =$$

$$= \frac{3\pi}{32 L_2} \left\{ \log n + 2C - 1 + \frac{8\mathfrak{M}_1}{\pi} + \frac{6\mathfrak{F}}{\pi^2} - \frac{\mathfrak{M}_2}{L_2} \right\}$$